Zadaci sa maturskog ispita (jun 1998. god.)

1. Konstruisati trougao ako su dati elementi : b, h_a, t_a.

2. Ako su x_1, x_2 rešenja jednačine $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha = 0$, odrediti α iz relacije $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

3. Jednakokraki trougao obrće se oko prave koja prolazi kroz teme na osnovici i paralelna je sa visinom trougla. Odrediti P i V obrtnog tela ako je osnovica c=12 a krak a=15.

4. Zbir binomnih koeficijenata II i III člana u razvoju binoma $\left(\sqrt[5]{x^2} - \frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ iznosi 153. Naći član koji ne sadrži *x*.

5. Rešiti jednačinu $5 + 8 + 11 + 14 + \ldots + x = 124$.

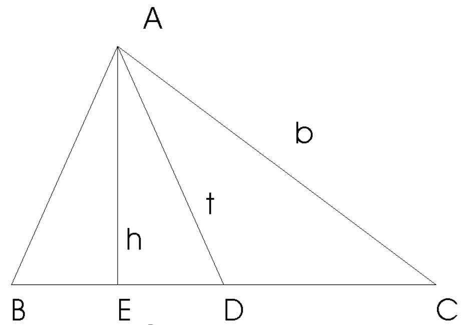
6. Data je parabola $y^2 = 8(x-2)$ i tačka P(4,y) parabole. Odrediti :
   a) jednačinu tangente parabole u tački P;
   b) zapreminu tela nastalog rotacijom figure ograničene tangentom, lukom krive i osom *Ox*, oko ose *Ox*.

7. Rešiti sistem jednačina
$$\begin{aligned} x^2 + xy &= 12 \\ xy - y^2 &= 2 \end{aligned}.$$

REŠENJA ZADATAKA

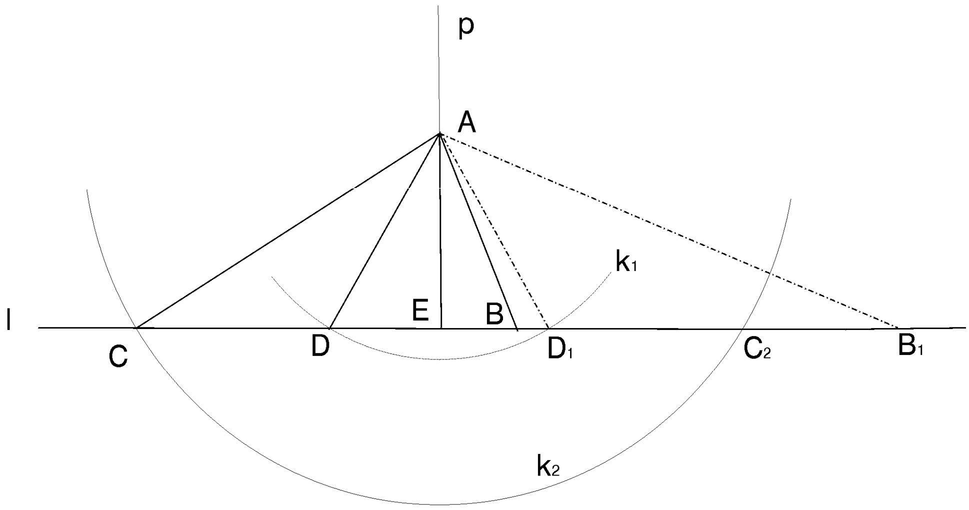
1.Analiza. Neka je podnožje visine h_a tačka E a D središte stranice BC (Sl. 1.). Trougao ΔADE možemo konstruisati jer su poznate dve stranice (AE i AD) i ugao ($\angle E = 90^\circ$). Trougao ΔACE takođe možemo konstruisati pošto je pravougli a poznata je kateta AE i hipotenuza AC.

Konstrukcija. Na pravoj l uočimo jednu tačku i obeležimo je sa E (Sl. 2). U tački E konstruišemo polupravu p normalno na pravu l. Na polupravoj p odredimo tačku A



Sl 1.

tako da duž AE bude jednaka datoj visini h_a. Zatim konstruišemo krug $k_1(A, t_a)$. Presečne tačke kruga k_1 i prave l obeležimo sa D i D_1. Zatim konstruišemo krug $k_2(A, b)$. Presečne tačke kruga k_2 i prave l obeležimo sa C i C_2.Zatim na pravoj l odredimo tačku B tako da je $C - D - B$ i $CD = DB$ (odnosno B_1 tako da je $C - D_1 - B_1$ i $C D_1 = D_1 B_1$). Zadatak ima dva nepodudarna rešenja, trou-



Sl. 2

glove ΔABC i ΔAB_1C.
Dokaz sledi iz analize i konstrukcije.

Diskusija. Ako je $b < h_a$, $t_a < h_a$ ili $b = h_a = t_a$ zadatak nema rešenja.

Ako je $b = h_a < t_a$, $h_a = t_a < b$ ili $h_a < b = t_a$ zadatak ima jedno rešenje.

Ako je $h_a < t_a < b$ ili $h_a < b < t_a$ zadatak ima dva nepodudarna rešenja (odnosno dva para nepodudarnih rešenja).

2. Pošto su x_1, x_2 rešenja date jednačine, primenom Vijetovih formula dobijamo

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2\cos\alpha$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = 1 - \sin\alpha$$

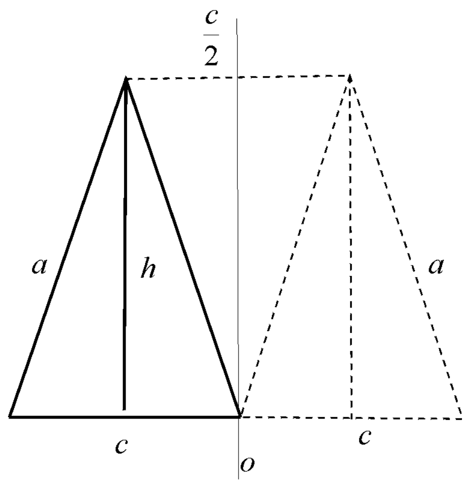
Relaciju $x_1^2 + x_2^2 = 2$, možemo zapisati u obliku $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 2$, odnosno

$$\begin{aligned}
&(2\cos\alpha)^2 - 2(1-\sin\alpha) = 2 \Leftrightarrow \\
&4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \\
&4(1-\sin^2\alpha) + 2\sin\alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \\
&-4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \\
&-2\sin\alpha(2\sin\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \\
&\sin\alpha = 0 \vee 2\sin\alpha - 1 = 0
\end{aligned}$$

$$\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi, k \in Z \quad \text{i} \quad 2\sin\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi.$$

Dakle $\alpha = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee \alpha = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \vee \alpha = k\pi, k \in Z$.

3. Dati trougao rotacijom obrazuje složeno telo - zarubljenu kupu iz koje je "izvađena" kupa. Poluprečnik veće baze zarubljene kupe je osnovica c, poluprečnik manje baze polovina te osnovice, izvodnica je krak trougla a visina, kao i visina kupe je visina datog trougla $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \sqrt{15^2 - 6^2} = 3\sqrt{21}.$



Poluprečnik osnove kupe je polovina osnovice c datog trougla a izvodnica krak trougla. Zapremina dobijenog tela jednaka je razlici zapremina zarubljene kupe i kupe

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + c\cdot\frac{c}{2}\right) - \frac{\pi h}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \frac{\pi h}{3}\left(c^2 + \frac{c^2}{2}\right) = \frac{\pi h c^2}{2}$$

$$= \frac{\pi \cdot 3\sqrt{21}\cdot 144}{2} = 216\pi\sqrt{21}.$$

Površina tela je zbir površina veće baze i omotača zarubljene kupe i omotača kupe

$$P = c^2\pi + a\left(c + \frac{c}{2}\right)\pi + a\frac{c}{2}\pi = \pi\left(c^2 + 2ac\right) = \pi(144 + 2\cdot 15\cdot 12) = 504\pi.$$

4. Binomni koeficijenti II i III člana su $\binom{n}{1} = n$ i $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

$$2n+n^2-n=306 \Leftrightarrow$$
$$n^2+n-306=0 \Leftrightarrow$$
$$n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\cdot 306}}{2}=\frac{-1\pm 35}{2}$$
$$n_1=17, n_2=-15$$

Prema tome, pošto je $n\in N \Rightarrow n=17$. Opšti član u razvoju datog binoma je

$$T_k=\binom{17}{k}\left(\sqrt[5]{x^2}\right)^{17-k}\left(-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^k=\binom{17}{k}x^{\frac{2}{5}(17-k)}\left(-\frac{1}{2}\right)^k x^{-\frac{1}{6}k}=\binom{17}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^k x^{\frac{34-2k}{5}-\frac{k}{6}}$$

Pošto treba da odredimo član koji ne sadrži x, mora biti

$$\frac{34-2k}{5}-\frac{k}{6}=0 \Leftrightarrow 6(34-2k)-5k=0 \Leftrightarrow 204-12k-5k=0 \Leftrightarrow k=12.$$

Prema tome 13-ti član u razvoju datog binoma ne sadrži x

$$T_{12}=\binom{17}{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{12}=\binom{17}{5}\frac{1}{2^{12}}=\frac{1547}{1024}.$$

5. $5+8+11+14+...+x=124.$

Sabirci na levoj strani jednačine čine aritmetički niz u kom je prvi član $a_1=5$,razlika $d=3$ a zbir prvih n članova $S_n=124$. Pošto je $S_n=\frac{1}{2}n[2a_1+(n-1)d]$, zamenom poznatih vrednosti dobijamo jednačinu

$$124=\frac{1}{2}n[10+(n-1)3] \Leftrightarrow$$
$$248=n(7+3n) \Leftrightarrow$$
$$3n^2+7n-248=0$$
$$n_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{49+12\cdot 248}}{2\cdot 3}$$
$$n_1=-\frac{61}{6}, n_2=8.$$

Pošto je $n\in N$, sledi da je $n=8$ pa je $x=a_8=5+7\cdot 3=26.$

6.Odredimo najpre drugu koordinatu tačke P: $y=\pm\sqrt{8\cdot 4-16}=\pm 4 \Rightarrow P_1(4,4), P_2(4,-4).$

a) Tangente parabole u datim tačkama odredimo pomoću izvoda funkcije

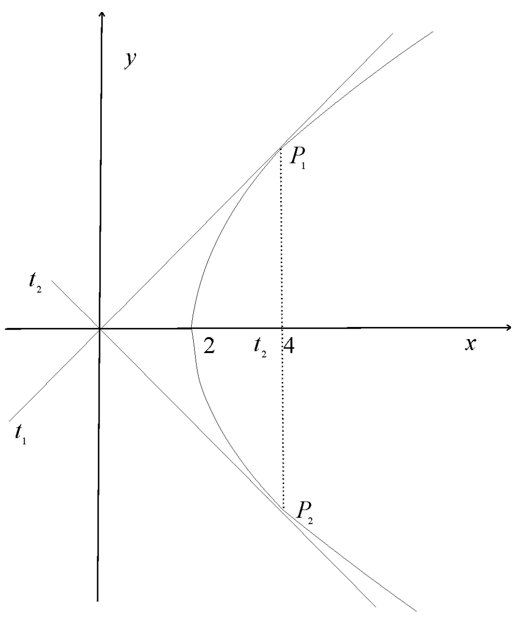
$$y_1=\sqrt{8x-16}$$
$$y_1'=\frac{8}{2\sqrt{8x-16}}$$
$$y_1'(4)=\frac{8}{2\sqrt{8\cdot 4-16}}=\frac{8}{2\cdot 4}=1,$$

pa je jednačina tangente u tački $P_1(4,4)$

$$(t_1): y-4=1(x-4) \Leftrightarrow$$
$$(t_1): y=x.$$

Slično se dobija i jednačina u tački $P_2(4,-4)$

$$y_2=-\sqrt{8x-16}$$
$$y_2'=-\frac{8}{2\sqrt{8x-16}}$$



$$y_2'(4) = -\frac{8}{2\sqrt{8\cdot 4-16}} = -\frac{8}{2\cdot 4} = -1$$

$$(t_2): y-(-4) = -1(x-4) \Leftrightarrow y = -x$$

b)

$$V = \pi\int_0^4 t_1^2 dx - \pi\int_2^4 y_1^2 dx = \pi\int_0^4 x^2 dx - \pi\int_2^4 (8x-16)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 - \left(4x^2-16x\right)\Big|_2^4\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{4^3}{3} - \left(\left(4^3-16\cdot 4\right) - \left(4\cdot 2^2 - 16\cdot 2\right)\right)\right) = \pi\left(\frac{4^3}{3} + 16 - 32\right) = \pi\left(\frac{64-48}{3}\right) = \frac{16\pi}{3}.$$

7.

$$x^2 + xy = 12$$
$$xy - y^2 = 2$$

Ako drugu jednačinu pomnožimo sa (-6) i saberemo jednačine,dobijamo homogenu jednačinu

$$x^2 + xy = 12$$
$$\underline{-6xy + 6y^2 = -12}$$
$$x^2 - 5xy + 6y^2 = 0$$

Pošto ne može biti y=0, jer zamenom u drugu jednačinu dobijemo da je 0=2, podelimo homogenu jednačinu sa y^2

$$\frac{x^2}{y^2} - 5\frac{xy}{y^2} + 6\frac{y^2}{y^2} = 0$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\left(\frac{x}{y}\right) + 6 = 0$$

Ovu jednačinu rešavamo zamenom $\frac{x}{y} = t$. Dobijena jednačina $t^2 - 5t + 6 = 0$ ima rešenja $t_1 = 2, t_2 = 3$. Dakle $\frac{x}{y} = 2$ ili $\frac{x}{y} = 3$, odnosno $x = 2y$ ili $x = 3y$. Rešenja datog sistema dobijamo rešavanjem sistema jednačina:

$$x = 2y \qquad\qquad x = 3y$$
$$xy - y^2 = 2 \qquad\qquad xy - y^2 = 2$$

Zamenom u drugu jednačinu dobijamo

$$2yy - y^2 = 2 \Leftrightarrow \qquad\qquad 3yy - y^2 = 2 \Leftrightarrow$$
$$y^2 = 2 \qquad\qquad y^2 = 1$$
$$y_1 = -\sqrt{2} \vee y_2 = \sqrt{2} \qquad\qquad y_1 = -1 \vee y_2 = 1$$

pa su rešenja sistema

$$\left(-2\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right), \left(2\sqrt{2}, \sqrt{2}\right), \left(-3,-1\right), \left(3,1\right).$$

Jan Slivka, prof.